

基数不変量を同時に分離するには

野呂秀貴

神戸大学大学院システム情報学研究科 博士課程後期課程システム情報学専攻

令和 8 年 1 月 10 日



① 導入

② 関係システム

③ Goodness argument

④ Bookkeeping argument

⑤ まとめと今後の展望

① 導入

② 関係システム

③ Goodness argument

④ Bookkeeping argument

⑤ まとめと今後の展望

基数不変量は最小の不可算濃度 $\aleph_1$ と 連続体濃度 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ の間にある基数である.

定義 1

$\text{add}(\mathcal{N})$ は 実数上の測度零集合が初めて和集合について閉じなくなる最小のサイズである.

$$\text{add}(\mathcal{N}) = \min\{\kappa ; \exists \mathcal{A} \in [\mathcal{N}]^\kappa \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{N}\}$$

$\text{cov}(\mathcal{N})$ は実数上の測度零集合の和集合で実数全体を覆うことができる最小のサイズである.

$$\text{cov}(\mathcal{N}) = \min\{\kappa ; \exists \mathcal{A} \in [\mathcal{N}]^\kappa \bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}\}$$

ここで, $\mathcal{N}$ は実数上のルベグ零集合全体の集まりである.

基数不変量は最小の不可算濃度 $\aleph_1$ と 連続体濃度 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ の間にある基数である.

定義 1

$\text{add}(\mathcal{N})$ は 実数上の測度零集合が初めて和集合について閉じなくなる最小のサイズである.

$$\text{add}(\mathcal{N}) = \min\{\kappa ; \exists \mathcal{A} \in [\mathcal{N}]^\kappa \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{N}\}$$

$\text{cov}(\mathcal{N})$ は実数上の測度零集合の和集合で実数全体を覆うことができる最小のサイズである.

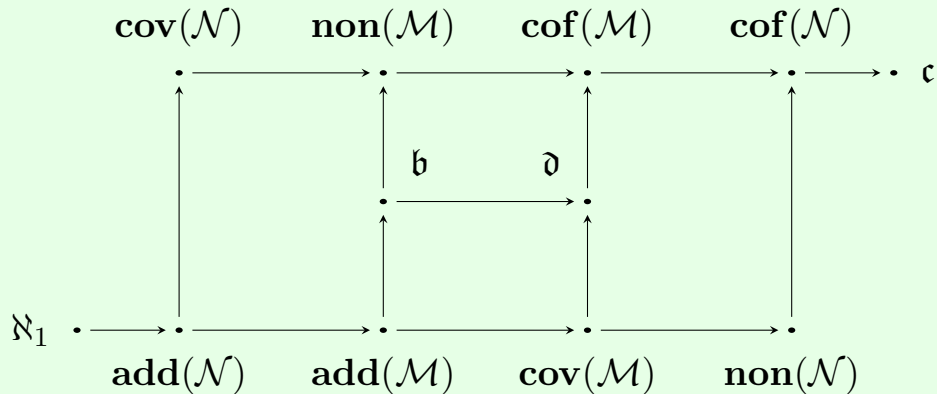
$$\text{cov}(\mathcal{N}) = \min\{\kappa ; \exists \mathcal{A} \in [\mathcal{N}]^\kappa \bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}\}$$

ここで, $\mathcal{N}$ は実数上のルベグ零集合全体の集まりである.

定理 2

$\aleph_1 \leq \text{add}(\mathcal{N}) \leq \text{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c}$ が成立する.

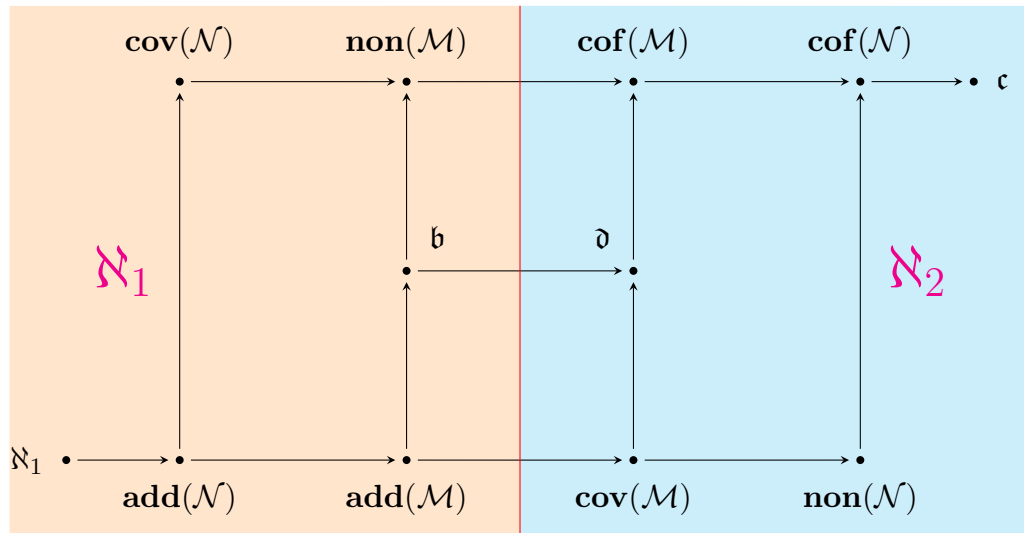
定理 3 (Cichoń の図式)



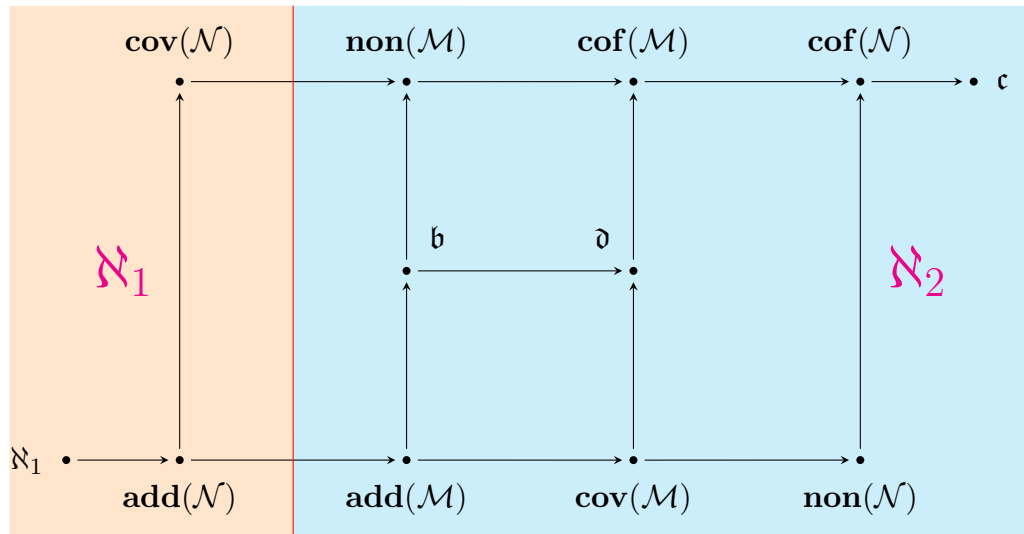
ここで「 $\rightarrow$ 」は「 $\leq$ 」を示す.

特に $\text{add}(\mathcal{M}) = \min\{\text{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\}$ と $\text{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\text{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$ が成立する.

Cohen モデルでは次のように値が決定されている:

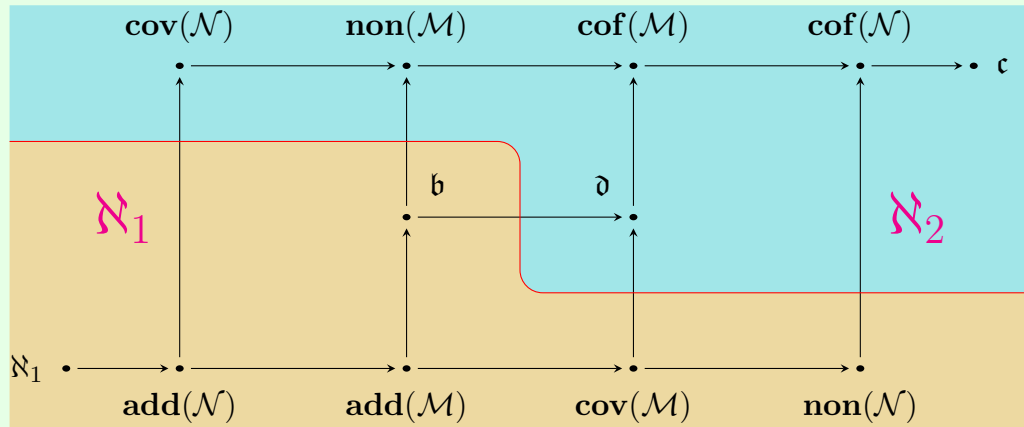


Hechler モデルでは次のように値が決定されている:



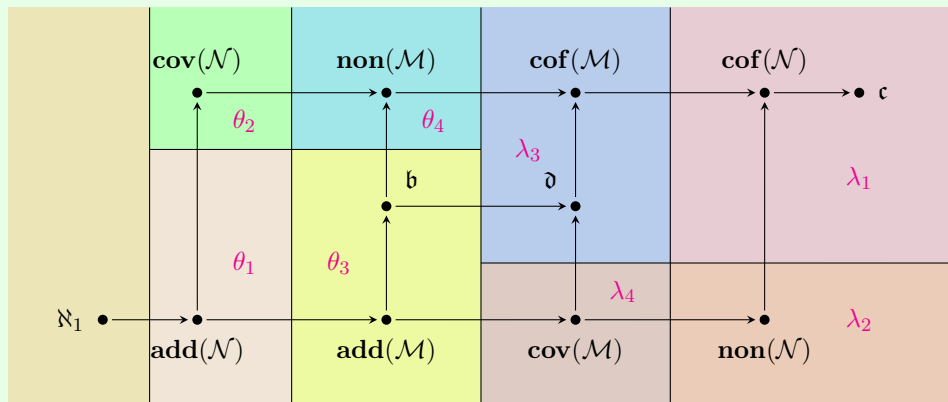
定理 4 (Bartoszyński and Judah [1])

以下の分離をみたすモデルが存在する:



定理 5 (Cichoń's maximum. Goldstern, Kellner, Mejía, Shelah [5, 4])

$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 \ll \lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$ にさらなる基数計算の仮定をすると, 拡大モデルで次を強制する強制半順序が存在する:



定義 6

$\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ が関係システムであるとは, X, Y が集合で, $\sqsubset$ が $X \times Y$ 上の二項関係である. 関係システム $\mathbf{R}$ に対して 2つの基数 (不変量) が定義できる:

- $\mathfrak{b}(\mathbf{R}) = \min\{\kappa ; \exists A \in [X]^\kappa \forall y \in Y \exists x \in A \neg x \sqsubset y\},$
- $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) = \min\{\kappa ; \exists B \in [Y]^\kappa \forall x \in X \exists y \in B x \sqsubset y\}.$

定義 6

$\mathbf{R} = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ が関係システムであるとは, X, Y が集合で, $\sqsubset$ が $X \times Y$ 上の二項関係である. 関係システム $\mathbf{R}$ に対して 2つの基数 (不変量) が定義できる:

- $\mathfrak{b}(\mathbf{R}) = \min\{\kappa; \exists A \in [X]^\kappa \forall y \in Y \exists x \in A \neg x \sqsubset y\},$
- $\mathfrak{d}(\mathbf{R}) = \min\{\kappa; \exists B \in [Y]^\kappa \forall x \in X \exists y \in B x \sqsubset y\}.$

この関係システムを用いることで, 多くの基数不変量が表現可能である.

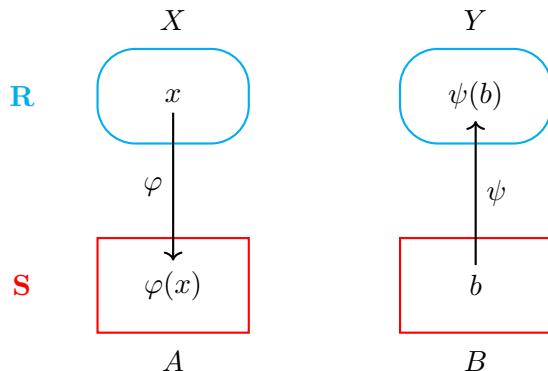
例 7

- $\mathcal{N} = (\mathcal{N}, \mathcal{N}, \subset)$ に対して, $\mathfrak{b}(\mathcal{N}) = \text{add}(\mathcal{N})$ と $\mathfrak{d}(\mathcal{N}) = \text{cof}(\mathcal{N})$ となる.
- $[X]^{<\theta} = ([X]^{<\theta}, [X]^{<\theta}, \subset)$ に対して, $\mathfrak{b}([X]^{<\theta}) = \theta$ と $\mathfrak{d}([X]^{<\theta}) = |X|$ となる.
- $\mathbf{C}_{[X]^{<\theta}} = (X, [X]^{<\theta}, \in)$ に対して, $\mathfrak{b}(\mathbf{C}_{[X]^{<\theta}}) = \theta$ と $\mathfrak{d}(\mathbf{C}_{[X]^{<\theta}}) = |X|$

θ は不可算正則基数であり, $|X| > \theta$ と $|X|^{<\theta} = |X|$ を仮定している.

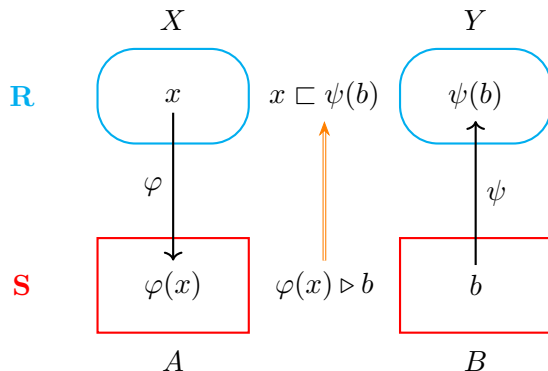
定義 8

2つの関係システム $R = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ と $S = \langle A, B, \triangleright \rangle$ に対して, $R \preceq S$ (Tukey connection) が成り立つとは, 2つの函数 $\varphi: X \rightarrow A$ と $\psi: B \rightarrow Y$ が存在して, $\varphi(x) \triangleright b$ ならば $x \sqsubset \psi(b)$ がすべての $x \in X$ と $b \in B$ に対して成立することである.



定義 8

2つの関係システム $R = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ と $S = \langle A, B, \triangleright \rangle$ に対して, $R \preceq S$ (Tukey connection) が成り立つとは, 2つの函数 $\varphi: X \rightarrow A$ と $\psi: B \rightarrow Y$ が存在して, $\varphi(x) \triangleright b$ ならば $x \sqsubset \psi(b)$ がすべての $x \in X$ と $b \in B$ に対して成立することである.



定義 8

2つの関係システム $R = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$ と $S = \langle A, B, \triangleright \rangle$ に対して, $R \preceq S$ (*Tukey connection*) が成り立つとは, 2つの関数 $\varphi: X \rightarrow A$ と $\psi: B \rightarrow Y$ が存在して, $\varphi(x) \triangleright b$ ならば $x \sqsubset \psi(b)$ がすべての $x \in X$ と $b \in B$ に対して成立することである.

特に $R \preceq S$ と $S \preceq R$ が成立するとき, Tukey 同値とよび $R \cong S$ と書く.

定理 9

関係システムの間に関係 $R \preceq S$ が成り立つとき、次が成立する:

$$b(S) \leq b(R)$$

$$d(R) \leq d(S)$$

特に, $R \cong C_{[|X|] < \theta}$ が成立するとき、次が成立する:

$$b(R) = \theta$$

$$d(R) = |X|$$

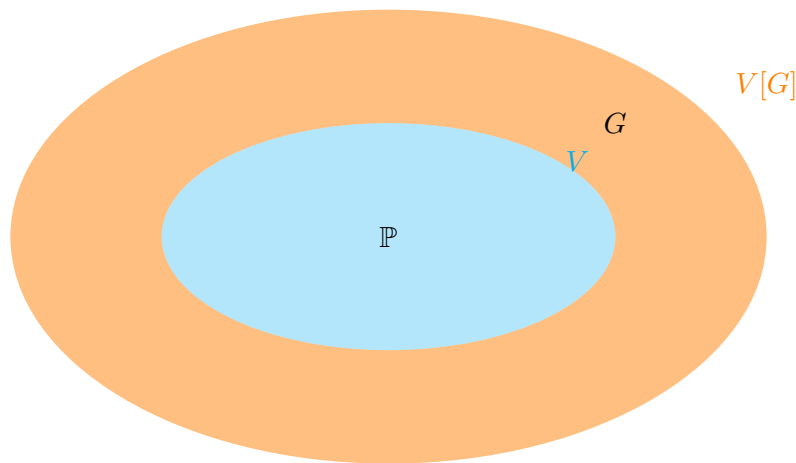
基数不変量を同時分離するときは, FS-反復強制法で Tukey 同値を強制すればよい.
よく知られた方法として、次が存在する.

- $C_{[|X|] < \theta} \preceq R$ を強制する方法として goodness argument
- $R \preceq C_{[|X|] < \theta}$ を強制する手法として bookkeeping argument

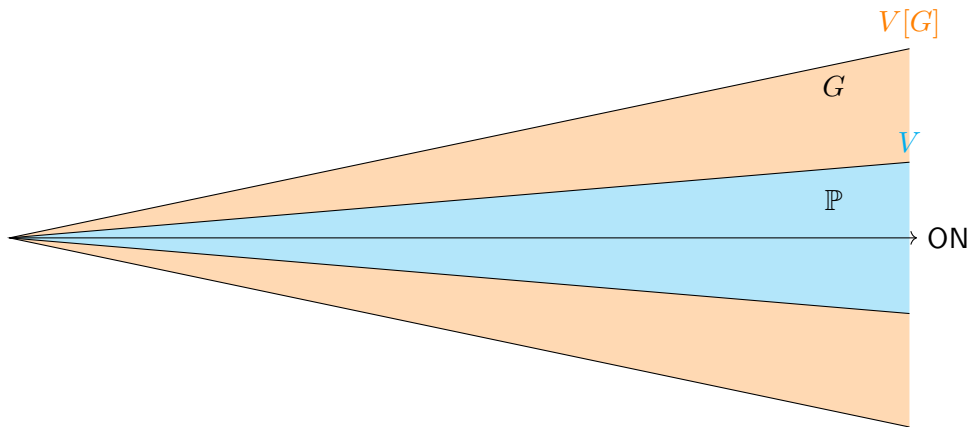
- ① 導入
- ② 関係システム
- ③ Goodness argument
- ④ Bookkeeping argument
- ⑤ まとめと今後の展望

強制法とは, 強制半順序 $\mathbb{P}$ を用いて 新しい ZFC のモデル $V[\mathbb{P}]$ を作る手段である. このとき, $V \subset V[\mathbb{P}]$ であり, 特に $\mathbb{P}$ に依ったジェネリックフィルター G は V には存在しないが $V[G]$ に存在する集合であり, $V[G]$ は $V \subset V[G]$ と $G \in V[\mathbb{P}]$ も満たす最小の ZFC モデルである.

強制法とは, 強制半順序 $\mathbb{P}$ を用いて 新しい ZFC のモデル $V[\mathbb{P}]$ を作る手段である. このとき, $V \subset V[\mathbb{P}]$ であり, 特に $\mathbb{P}$ に依ったジェネリックフィルター G は V には存在しないが $V[G]$ に存在する集合であり, $V[G]$ は $V \subset V[G]$ と $G \in V[\mathbb{P}]$ も満たす最小の ZFC モデルである.



強制法とは, 強制半順序 $\mathbb{P}$ を用いて 新しい ZFC のモデル $V[\mathbb{P}]$ を作る手段である. このとき, $V \subset V[\mathbb{P}]$ であり, 特に $\mathbb{P}$ に依ったジェネリックフィルター G は V には存在しないが $V[G]$ に存在する集合であり, $V[G]$ は $V \subset V[G]$ と $G \in V[\mathbb{P}]$ も満たす最小の ZFC モデルである.



強制法とは, 強制半順序 $\mathbb{P}$ を用いて 新しい ZFC のモデル $V[\mathbb{P}]$ を作る手段である. このとき, $V \subset V[\mathbb{P}]$ であり, 特に $\mathbb{P}$ に依ったジェネリックフィルター G は V には存在しないが $V[G]$ に存在する集合であり, $V[G]$ は $V \subset V[G]$ と $G \in V[\mathbb{P}]$ も満たす最小の ZFC モデルである.

定義 10

強制半順序 $\mathbb{P}$ と関係システム $R = \langle X, Y, \sqsubset \rangle$, 不可算正則基数 θ に対して, $\mathbb{P}$ が θ -R-good であるとは, すべての Y の元の $\mathbb{P}$ -名前 $\dot{y}$ に対して ある $<\theta$ -サイズの $H \subset Y$ が存在して次を満たす:

$$\forall x \in X \ (\forall y \in H \ \neg x \sqsubset y) \implies \Vdash \neg x \sqsubset \dot{y}$$

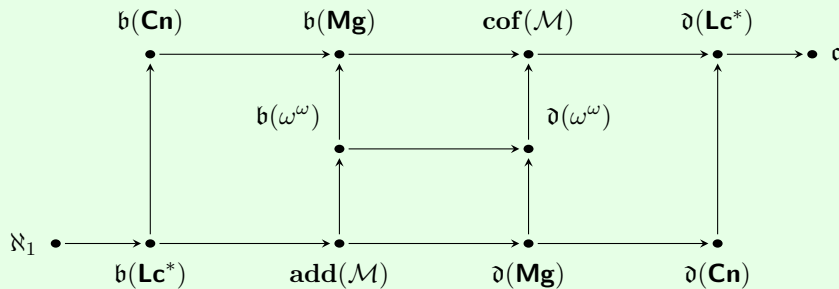
特に, $\theta = \aleph_1$ のときは $\aleph_1$ -R-good を単に R-good という.

定理 11

強制半順序 $\mathbb{P}$ と不可算正則基数 θ に対して, $|\mathbb{P}| < \theta$ であれば 任意の関係システム R に対して, $\mathbb{P}$ は θ -R-good である.

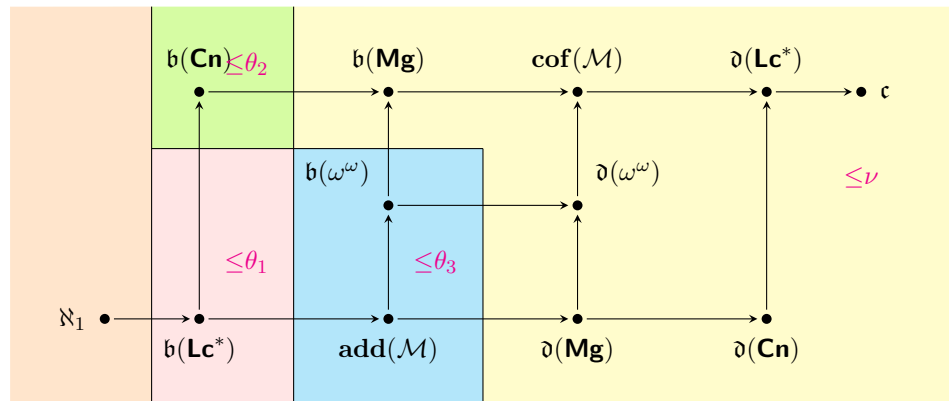
定理 12

Cichon の図式に現れる基数不変量は $\mathfrak{Lc}^*$, $\mathfrak{Cn}$, ω^ω , $\mathfrak{Mg}$ の 4 つの関係システムで書き表すことができる.



ここで, $\text{add}(\mathcal{M}) = \min\{\mathfrak{b}, \text{cov}(\mathcal{M})\} = \min\{\mathfrak{b}(\omega^\omega), \mathfrak{d}(\mathfrak{Mg})\}$ と
 $\text{cof}(\mathcal{M}) = \max\{\mathfrak{d}, \text{non}(\mathcal{M})\} = \max\{\mathfrak{d}(\omega^\omega), \mathfrak{b}(\mathfrak{Mg})\}$ が成立している.

目標: Goodness argument を活用して次を示す:



$$\aleph_1 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \nu.$$

定理 13

$\mathbb{B}$ と $\mathbb{D}$ について次の性質が成り立つ:

- $\mathbb{B}$ は $\mathbf{Lc}^*$ -good, より一般に $\mathbb{B}$ の *subalgebra* は $\mathbf{Lc}^*$ -good である. (Kamburelis [8])
- $\mathbb{D}$ は $\mathbf{Cn}$ -good, より一般に μ -centred ならば μ^+ - $\mathbf{Cn}$ -good である. (see [2])
- $\mathbb{D}$ は $\mathbf{Lc}^*$ -good, より一般に μ -centred ならば μ^+ - $\mathbf{Lc}^*$ -good である. (see [2, 7])

	$\mathbf{LOC}^{\dot{N}_\xi}$	$\mathbb{B}^{\dot{N}_\xi}$	$\mathbb{D}^{\dot{N}_\xi}$
size of $\dot{N}_\xi$	$<\theta_1$	$<\theta_2$	$<\theta_3$
$\kappa\text{-}\mathbf{Lc}^*\text{-good}$	θ_1	$\aleph_1$	$\aleph_1$
$\kappa\text{-}\mathbf{Cn}\text{-good}$	θ_1	θ_2	$\aleph_1$
$\kappa\text{-}\omega^\omega\text{-good}$	θ_1	θ_2	θ_3

ここで, $\dot{N}_\xi$ は ZFC のサイズ $<\theta_i$ の推移的モデルの $\mathbb{P}_\xi$ -名前.

定理 14 (Fuchino and Mejía)

θ を正則基数. $\mathbb{P} = \langle (\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi) ; \xi < \nu \rangle$ を FS-反復強制法で各 $\mathbb{Q}_\xi$ が θ -cc かつ θ - $\mathbb{R}$ -good であるとする. このとき, $\mathbf{C}_{[\nu] < \theta} \preceq \mathbf{R}$ が成立する.

よって, 下の表にある強制概念を用いて作られた FS-反復強制法は $\mathbf{C}_{[\nu] < \theta_1} \preceq \mathbf{Lc}^*$, $\mathbf{C}_{[\nu] < \theta_3} \preceq \mathbf{Cn}$, $\mathbf{C}_{[\nu] < \theta_3} \preceq \omega^\omega$ が成立する:

	$\text{LOC}^{\dot{N}_\xi}$	$\mathbb{B}^{\dot{N}_\xi}$	$\mathbb{D}^{\dot{N}_\xi}$
size of $\dot{N}_\xi$	$< \theta_1$	$< \theta_2$	$< \theta_3$
κ - $\mathbf{Lc}^*$ -good	θ_1	$\aleph_1$	$\aleph_1$
κ - $\mathbf{Cn}$ -good	θ_1	θ_2	$\aleph_1$
κ - ω^ω -good	θ_1	θ_2	θ_3

定理 15 (Miller [9])

$\mathbb{E}$ は $\mathbf{Lc}^*$, $\mathbf{Cn}$, ω^ω それぞれに関して *good* である.
特に次が成立する:

	$\mathbf{LOC}^{\dot{N}_\xi}$	$\mathbf{B}^{\dot{N}_\xi}$	$\mathbf{D}^{\dot{N}_\xi}$	$\dot{\mathbb{E}}$
<i>size of $\dot{N}_\xi$</i>	$<\theta_1$	$<\theta_2$	$<\theta_3$	—
$\kappa\text{-}\mathbf{Lc}^*\text{-good}$	θ_1	$\aleph_1$	$\aleph_1$	$\aleph_1$
$\kappa\text{-}\mathbf{Cn}\text{-good}$	θ_1	θ_2	$\aleph_1$	$\aleph_1$
$\kappa\text{-}\omega^\omega\text{-good}$	θ_1	θ_2	θ_3	$\aleph_1$

- ① 導入
- ② 関係システム
- ③ Goodness argument
- ④ Bookkeeping argument
- ⑤ まとめと今後の展望

定義 16

関係システム $\mathbb{R} = \langle A, B, \sqsubset \rangle$ に対して, 強制概念 $\mathbb{P}$ に対して $\dot{x}$ が $\mathbb{R}$ -dominating 対象 (実数) であるとは:

$$\Vdash \forall a \in A \cap V \ a \sqsubset \dot{x}$$

を満たすことである. つまり, 次が成立することである.

$$V[\mathbb{P}] \models \forall a \in A \cap V \ a \sqsubset x$$

特に 部分集合 $H \subset A$ に対して, $\dot{x}$ が H 上の $\mathbb{R}$ -dominating 対象であるとは, 次を満たすことである:

$$\Vdash \forall a \in H \cap V \ a \sqsubset \dot{x}$$

再掲

$$\mathfrak{b}(\mathbb{R}) = \min\{\kappa ; \exists X \in [A]^\kappa \forall b \in B \exists a \in X \neg a \sqsubset b\}$$

定理 17 (bookkeeping argument. (Cardona and Mejía [3]))

関係システム $\mathbf{R} = \langle A, B, \sqsubset \rangle$ と 不可算正則基数 θ と FS-反復強制概念

$\mathbb{P} = \langle (\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi) ; \xi < \nu \rangle$ の各ステージが θ -cc で $\text{cf}(\nu) \geq \theta$ を満たすとする.

このとき, 任意の $\xi < \nu$ と $H \in [A]^{<\theta} \cap V_\xi$ に対して ある $\eta \geq \xi$ が存在して, 次を満たすとき,

$\dot{\mathbb{Q}}_\eta$ は H 上の $\mathbf{R}$ -dominating 対象を追加する

$\mathbb{P}_\nu$ は $\mathbf{R} \preceq \mathbf{C}_{[X]^{<\theta}} \cong \mathbf{C}_{[X]^{<\theta} \cap V}$ を強制する.

この定理において, 任意の ξ と $H \in [A]^{<\theta} \cap V_\xi$ に対して, 適切なタイミングで所望する $\dot{\mathbb{Q}}_\eta$ が現れるようにする仕組みを bookkeeping argument と呼ぶ.



定理 18

- LOC は Lc^* -dominating 対象を追加する.
- $\mathbb{B}$ は Cn -dominating 対象を追加する.
- $\mathbb{D}$ は ${}^\omega\omega$ -dominating 実数を追加する.
- $\mathbb{E}$ は Mg -dominating 実数を追加する.

$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5$ と $\nu = \theta_5 \cdot \theta_4$ に対して, ν を C_0, C_1, C_2, C_3 を 4 つに分割し, FS-反復強制概念 $\mathbb{P} = \langle (\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi); \xi < \nu \rangle$ を次で定める:

$$\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \begin{cases} \dot{\mathbb{E}} & \text{if } \xi \in C_0 \\ \text{LOC}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_1 \\ \mathbb{B}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_2 \\ \mathbb{D}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_3 \end{cases}$$

ここで, $\dot{N}_\xi$ は ZFC のサイズ $< \theta_i$ の推移的モデルの $\mathbb{P}_\xi$ -名前である. ($\xi \in C_i$ のとき)

$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5$ と $\nu = \theta_5 \cdot \theta_4$ に対して, ν を C_0, C_1, C_2, C_3 を 4 つに分割し, FS-反復強制概念 $\mathbb{P} = \langle (\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi) ; \xi < \nu \rangle$ を次で定める:

$$\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \begin{cases} \dot{\mathbb{E}} & \text{if } \xi \in C_0 \\ \text{LOC}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_1 \\ \mathbb{B}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_2 \\ \mathbb{D}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_3 \end{cases}$$

ここで, $\dot{N}_\xi$ は ZFC のサイズ $< \theta_i$ の推移的モデルの $\mathbb{P}_\xi$ -名前である. ($\xi \in C_i$ のとき)

$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5$ と $\nu = \theta_5 \cdot \theta_4$ に対して, ν を C_0, C_1, C_2, C_3 を 4 つに分割し, FS-反復強制概念 $\mathbb{P} = \langle (\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi) ; \xi < \nu \rangle$ を次で定める:

$$\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \begin{cases} \dot{\mathbb{E}} & \text{if } \xi \in C_0 \\ \text{LOC}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_1 \\ \mathbb{B}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_2 \\ \mathbb{D}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_3 \end{cases}$$

ここで, $\dot{N}_\xi$ は ZFC のサイズ $< \theta_i$ の推移的モデルの $\mathbb{P}_\xi$ -名前である. ($\xi \in C_i$ のとき)
 加えて, C_1, C_2, C_3 はそれぞれ Lc^* , Cn , ω^ω に対して bookkeeping の仮定を満たすように選択する.

C_3 : $\forall \xi < \nu \forall A \in [\omega^\omega]^{<\theta_1} \cap V_\xi \exists \eta > \xi \eta \in C_3 \wedge H \subset N_\eta$ を満たすようにする.

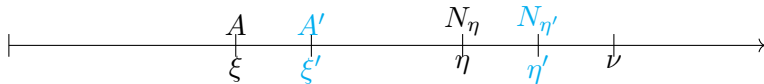


$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5$ と $\nu = \theta_5 \cdot \theta_4$ に対して, ν を C_0, C_1, C_2, C_3 を 4 つに分割し, FS-反復強制概念 $\mathbb{P} = \langle (\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi) ; \xi < \nu \rangle$ を次で定める:

$$\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \begin{cases} \dot{\mathbb{E}} & \text{if } \xi \in C_0 \\ \text{LOC}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_1 \\ \mathbb{B}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_2 \\ \mathbb{D}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_3 \end{cases}$$

ここで, $\dot{N}_\xi$ は ZFC のサイズ $< \theta_i$ の推移的モデルの $\mathbb{P}_\xi$ -名前である. ($\xi \in C_i$ のとき)
 加えて, C_1, C_2, C_3 はそれぞれ Lc^* , Cn , ω^ω に対して bookkeeping の仮定を満たすように選択する.

C_3 : $\forall \xi < \nu \forall A \in [\omega^\omega]^{<\theta_1} \cap V_\xi \exists \eta > \xi \eta \in C_3 \wedge H \subset N_\eta$ を満たすようにする.



$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5$ と $\nu = \theta_5 \cdot \theta_4$ に対して, ν を C_0, C_1, C_2, C_3 を 4 つに分割し, FS-反復強制概念 $\mathbb{P} = \langle (\mathbb{P}_\xi, \dot{Q}_\xi) ; \xi < \nu \rangle$ を次で定める:

$$\dot{Q}_\xi = \begin{cases} \dot{\mathbb{E}} & \text{if } \xi \in C_0 \\ \text{LOC}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_1 \\ \mathbb{B}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_2 \\ \mathbb{D}^{\dot{N}_\xi} & \text{if } \xi \in C_3 \end{cases}$$

ここで, $\dot{N}_\xi$ は ZFC のサイズ $< \theta_i$ の推移的モデルの $\mathbb{P}_\xi$ -名前である. ($\xi \in C_i$ のとき)
 加えて, C_1, C_2, C_3 はそれぞれ Lc^* , Cn , ω^ω に対して bookkeeping の仮定を満たすように選択する.

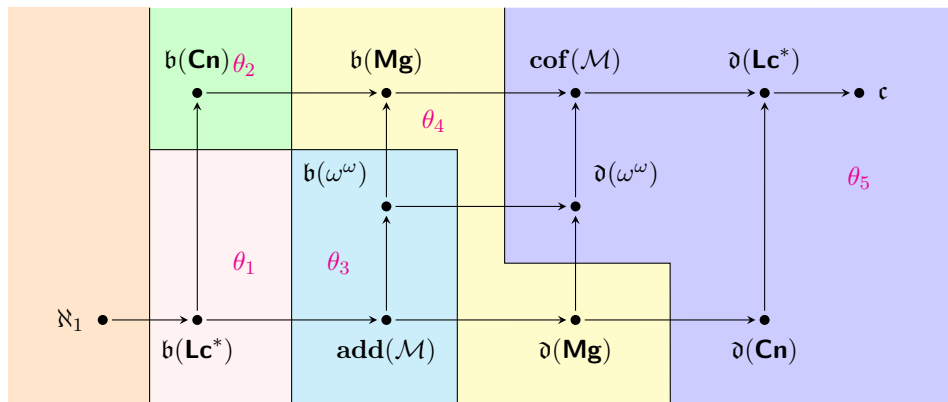
このようにすれば, $\mathbb{P}$ は次の 3 つを強制することが出来る:

- $\text{Lc}^* \cong \mathcal{C}_{[|\mathbb{R}|]^{<\theta_1}},$
- $\text{Cn} \cong \mathcal{C}_{[|\mathbb{R}|]^{<\theta_2}},$
- $\omega^\omega \cong \mathcal{C}_{[|\mathbb{R}|]^{<\theta_3}}$

特に, 長さ ν の ccc 強制概念を用いた FS-反復強制法では $\Vdash \mathfrak{c} = |\nu| = \theta_5$ となる.

また, $\mathbb{E}$ は $\text{cf}(\nu)$ -回登場しているならば, $\mathfrak{b}(\text{Mg}) = \mathfrak{d}(\text{Mg}) = \text{cf}(\nu) = \theta_4$ が成立することが知られている. (Cardona and Mejía [3])

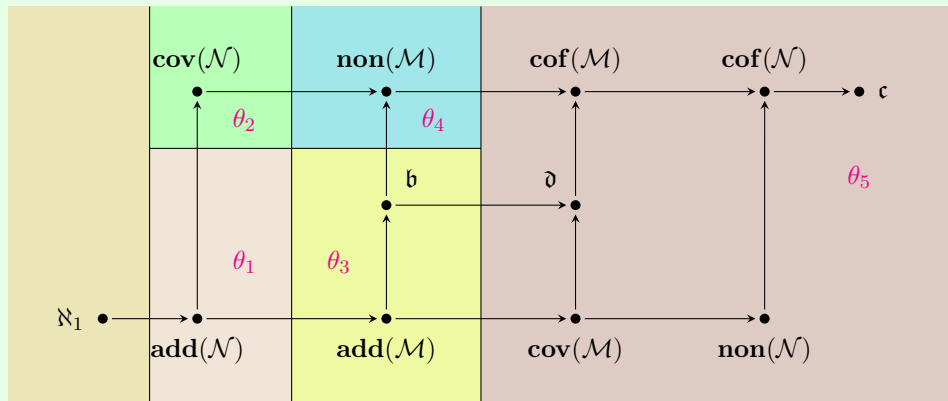
従って, $\mathbb{P}$ は次の分離を実現するモデルを構成可能である:



- ① 導入
- ② 関係システム
- ③ Goodness argument
- ④ Bookkeeping argument
- ⑤ **まとめと今後の展望**

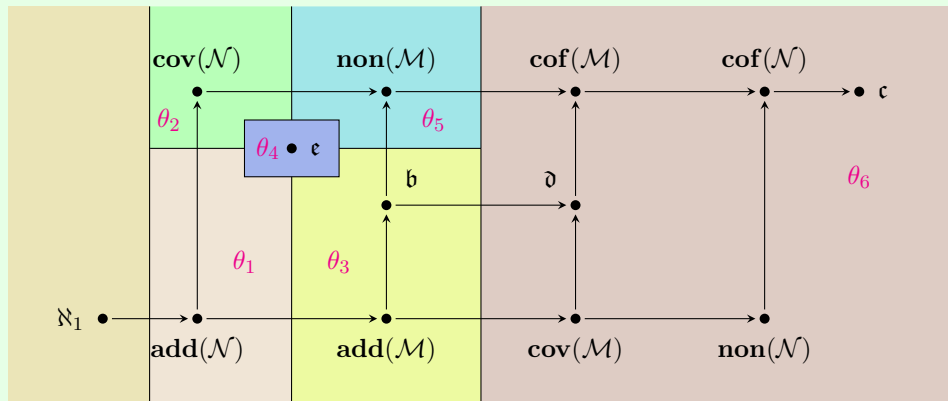
定理 19 (Goldstern, Kellner, Mejía, Shelah [6, 5])

$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5$ にいくつかの基数計算の仮定をすると, 拡大モデルで次を強制する強制半順序が存在する: (*bookkeeping* と *goodness* のみで証明できるかは未解決である)



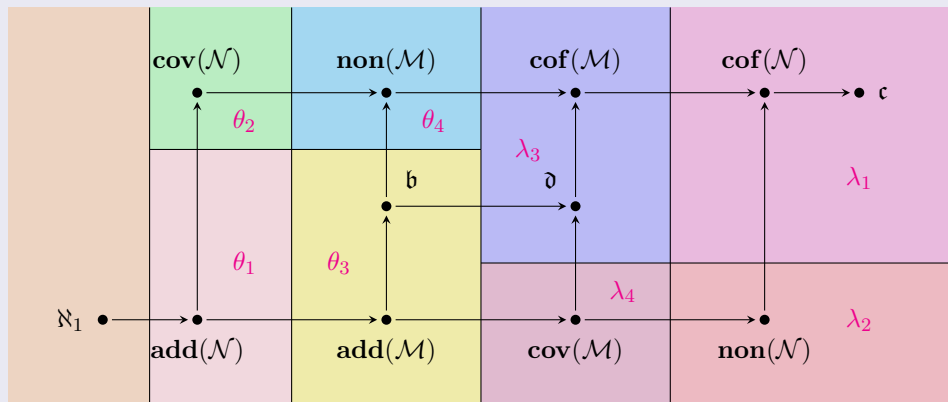
定理 20 (Yamazoe [10])

$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5 < \theta_6$ にいくつかの基数計算の仮定をすると, 拡大モデルで次を強制する強制半順序が存在する: (*bookkeeping* と *goodness* のみで証明できるかは未解決である)



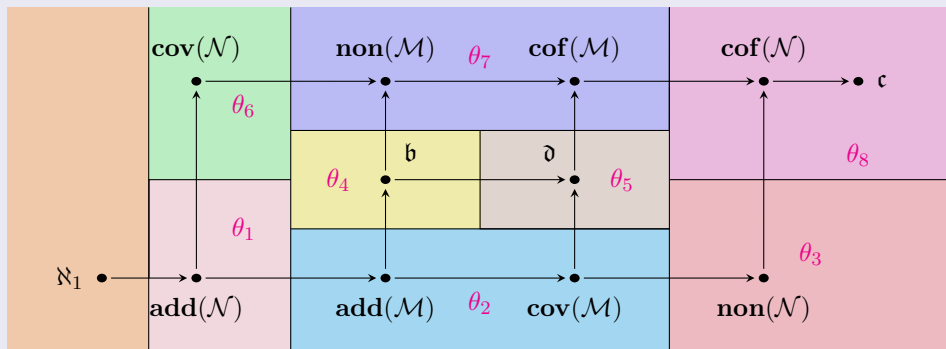
再掲 Cichoń's maximum. Goldstern, Kellner, Mejía, Shelah [5, 4]

$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 \ll \lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$ にさらなる基数計算の仮定をすると, 拡大モデルで次を強制する強制半順序が存在する:



問題 21

- $S \preceq R$ かつ $\mathbb{P}$ が S -good ならば $\mathfrak{b}(R) \leq \mathfrak{b}(S)$ を上から評価可能である:
 - 同じ仮定から R -good を導くために必要な条件はどのようなものがあるのか?
- 異なる分離方法は存在するのか?
 - 次のような分離は可能であるか:



- [1] Tomek Bartoszyński and Haim Judah.
Set theory.
A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995.
On the structure of the real line.
- [2] Jörg Brendle.
Larger cardinals in Cichoń's diagram.
J. Symbolic Logic, 56(3):795–810, 1991.
- [3] Miguel A. Cardona and Diego A. Mejía.
Forcing constellations of Cichoń's diagram by using the Tukey order.
Kyōto Daigaku Sūrikaiseki Kenkyūsho Kōkyūroku, 2213:14–47, 2022.
[arXiv:2203.00615](#).
- [4] Martin Goldstern, Jakob Kellner, Diego A. Mejía, and Saharon Shelah.
Cichoń's maximum without large cardinals.
J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 24(11):3951–3967, 2022.
- [5] Martin Goldstern, Jakob Kellner, and Saharon Shelah.
Cichoń's maximum.
Annals of Mathematics, 190(1), July 2019.

- [6] Martin Goldstern, Diego Alejandro Mejía, and Saharon Shelah.
The left side of Cichoń's diagram.
Proc. Amer. Math. Soc., 144(9):4025–4042, 2016.
- [7] Haim Judah and Saharon Shelah.
The Kunen-Miller chart (Lebesgue measure, the Baire property, Laver reals and preservation theorems for forcing).
J. Symbolic Logic, 55(3):909–927, 1990.
- [8] Anastasis Kamburelis.
Iterations of Boolean algebras with measure.
Arch. Math. Logic, 29(1):21–28, 1989.
- [9] Arnold W. Miller.
Some properties of measure and category.
Trans. Amer. Math. Soc., 266(1):93–114, 1981.
- [10] Takashi Yamazoe.
Cichoń's maximum with evasion number, 2024.