

無限の組み合わせ論について

野呂秀貴

神戸大学大学院システム情報学研究科 博士課程後期課程システム情報学専攻

令和 7 年 10 月 16 日

修正版

① 導入

② $\aleph_1$ 上の組み合わせ論

③ 実数上の組み合わせ論

④ $\aleph_1$ 上と実数上の組み合わせ論の関係性

① 導入

② $\mathbb{N}_1$ 上の組み合わせ論

③ 実数上の組み合わせ論

④ $\mathbb{N}_1$ 上と実数上の組み合わせ論の関係性

定義 1

集合 $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, 1 \rangle$ が強制半順序 (*forcing poset*) であるとは,

- $\leq_{\mathbb{P}}$ は $\mathbb{P}$ 上の推移的反射的順序である, $q \leq_{\mathbb{P}} p$ のとき, q は p の拡大 (*extension*) という.
- 1 は $\mathbb{P}$ の元であり, $\leq_{\mathbb{P}}$ 上の極大限である. すなわち, 任意の p について $p \leq_{\mathbb{P}} 1$ である.

$D \subset \mathbb{P}$ が稠密 (*dense*) であるとは,

$$\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D \ q \leq_{\mathbb{P}} p$$

$G \subset \mathbb{P}$ がフィルター (*filter*) であるとは,

- $\forall p, q \in G \exists r \in G \ r \leq_{\mathbb{P}} p, q,$
- $\forall p \in \mathbb{P} \forall q \in G \ q \leq_{\mathbb{P}} p \implies p \in G,$

特に, $\mathbb{P}$ の任意の稠密部分集合 D を交わりを持つようなフィルター G を $\mathbb{P}$ のジェネリックフィルター (*generic filter*) という.

強制法とは:

強制拡大 (forcing extension) とはグラントモデル V 上に存在する $\mathbb{P}$ に対して V に存在しないジェネリックフィルター G が存在する拡大モデル $V[G](\supset V, \{G\})$ を構成する手法である.

例 2 (Random 強制法, Solovay[Sol70] (or see[Jec03]))

ランダム強制法 (*Random forcing*) $\mathbb{P}$ とは,

- $\mathbb{P} = \{A; A \text{ は } [0, 1] \text{ のルベグ正測度部分集合.}\},$
- $\leq_{\mathbb{P}} = \subset, \mathbb{1} = [0, 1].$

特に, 各 $n \in \omega$ について, $D_n = \{A \in \mathbb{P}; \text{Lb}(A) < 2^{-(n+1)}\}$ は稠密である:

定理 3 (Solovay[Sol70])

もし, ランダム半順序に対してジェネリックフィルター G が存在すれば, ある点 $r \in [0, 1]$ が存在し, $\{r\} = \bigcap G$ である. この r をランダム実数 (*Random real*) と呼ぶ.

① 導入

② $\aleph_1$ 上の組み合わせ論

③ 実数上の組み合わせ論

④ $\aleph_1$ 上と実数上の組み合わせ論の関係性

定義 4

部分集合 $A \subset \mathbb{P}$ が反鎖 (*antichain*) であるとは、任意の 2 元 $p, q \in A$ に対して、 $r \leq p, q$ を満たす $r \in \mathbb{P}$ が存在しないときである。

$\mathbb{P}$ が可算鎖条件 (*countable chain condition, ccc*) を満たすとは、任意の反鎖が高々加算集合であるときまたその限りである。

自然数 $n \in \omega$ に対して、 $\mathbb{P}$ が n -Knaster 性をもつとは、任意の $A \subseteq \mathbb{P}$ に対して、 $|A| = \aleph_1$ ならばある $\aleph_1$ -サイズの部分集合 $B \subseteq A$ が存在し、任意の $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$ に対して、 $b \leq b_i (\forall i)$ を満たす $b \in \mathbb{P}$ が存在するときである。

$A \subset \mathbb{P}$ が *centred* であるとは、任意有限個の $a_i \in A$ に対して、 $p \leq_{\mathbb{P}} a_i$ for all i をみたす $p \in \mathbb{P}$ が存在するときである。 $\mathbb{P}$ が *centred* の可算和集合になるとき $\mathbb{P}$ を σ -centred という。

事実 5

- $n + 1$ -Knaster ならば n -Knaster である。
- n -Knaster ならば *ccc* である。
- σ -centerd ならば 任意の n に対して n -Knaster である。
- ランダム強制法は任意の $n \in \omega$ に対して n -Knaster だが、 σ -centred ではない。

定義 6 (Martin and Solovay[MS70])

$\mathbb{P}$ を *ccc 強制半順序* とし, κ を基数とする.

$\text{MA}(\kappa)$ (κ -Martin Axiom) とは, $\mathbb{P}$ の稠密部分集合からなる集合族 $\mathcal{D}$ に対して $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ ならば あるフィルター G が存在し 全ての $D \in \mathcal{D}$ を交わりをもつ. 特に, $\text{MA}(\mathfrak{c})$ は ZFC 上で不成立である. MA は $\text{MA}(\kappa)$ が 任意の $\kappa < \mathfrak{c}$ に対して成立するという主張である.

定義 7

自然数 $n \geq 2$ に対して, $\mathcal{K}_n$ とは次のような主張である:

任意の *ccc 強制半順序* は *n-Knaster* である.

事実 8 (Solovay and Tennenbaum)

- $\text{ZFC} \models \text{MA}(\aleph_0)$.
- $\text{MA}(\aleph_1)$ ならば任意の n について $\mathcal{K}_n$ が成立する.
- $\text{ZFC} + \text{CH} \models \text{MA}$. • $\text{Con}(\text{ZFC} + \neg \text{CH} + \text{MA})$.

定義 9 (ccc-分割, Todorćević [Tod89])

集合 A と基数 κ に対して, $[A]^\kappa$ を A の κ -元部分集合の族とする.

- $K_0 \subset [\omega_1]^n$ に対して, 部分集合 $A \subset \omega_1$ が K_0 -homogeneous であるとは, $[A]^n \in K_0$ であるときである.
- 分割 $[\omega_1]^n = K_0 \dot{\cup} K_1$ に対して, K_0 が ccc partition であるとは, 不可算個の有限 K_0 -homogeneous sets H_ξ , $\xi \in \omega_1$, に対して, ある H_ξ, H_η が存在して, $H_\xi \cup H_\eta$ もまた K_0 -homogeneous であるときである. これは次の強制半順序が ccc であることと同じである.
 - $\mathbb{P} = \{H ; H \text{ は有限 } K_0\text{-homogeneous set}\},$
 - $\leq_{\mathbb{P}} = \supset$

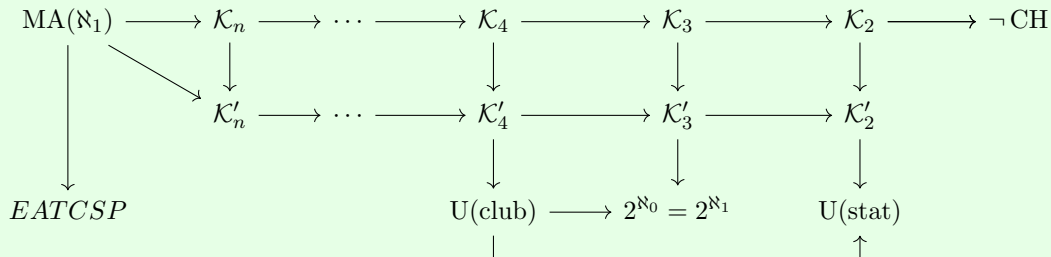
定義 10 (Todorćević [Tod89])

自然数 n に対して, $\mathcal{K}'_n$ とは次のような主張である:

任意の ccc-分割 $K_0 \dot{\cup} K_1 = [\omega_1]^n$ に対して, 不可算な K_0 -homogeneous 集合が存在する.

定理 11 (Yorioka [Yor19], Devlin and Shelah[DS78])

$\text{MA}(\aleph_1)$ の断片 (*Todorćević fragment*) として次のような関係がある.



① 導入

② $\mathbb{N}_1$ 上の組み合わせ論

③ 実数上の組み合わせ論

④ $\mathbb{N}_1$ 上と実数上の組み合わせ論の関係性

概要.

実数上の組み合わせ論とは, $\aleph_1$ と実数の濃度 $\mathfrak{c}$ の間の基数 (基数不変量, cardinal invariants) の大小関係に関する研究である.[Bla10] や [CM22], [GKMS21]などを参考にとよい.

定義 12

マーティン数 (Martin number) は $\mathfrak{m} = \min\{\kappa; \neg \text{MA}(\kappa)\}$ により定まる基数不変量である:

定義 13

$\mathcal{N}$ を $[0, 1]$ 区間上のルベグ零集合の集まりとする. このとき次が成立する.

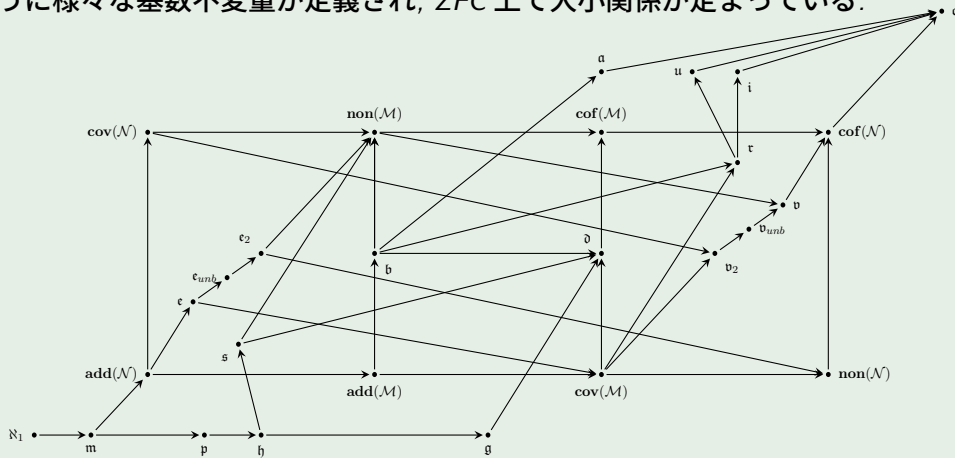
- 任意の可算個の $N_i \in \mathcal{N}$ に対して, $\cup\{N_i; i \in \omega\} \in \mathcal{N}$ である (σ -代数性),
- ある連続体濃度個の $N_\xi \in \mathcal{N}$ が存在し, $\cup\{N_\xi; \xi < \mathfrak{c}\}$ は測度 0 でない.

この事実より, 次のような基数を考えれば, $\aleph_1 \leq \text{add}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c}$ である.

$$\text{add}(\mathcal{N}) = \min\{\kappa; \forall \Omega \in [\mathcal{N}]^\kappa \cup \Omega \notin \mathcal{N}\}$$

例 14 (Cichoń's-Blass diagram, Blass[Bla10])

次のように様々な基数不変量が定義され, ZFC 上で大小関係が定まっている.



定義 15

集合族 $\mathcal{F} \subset [\omega]^\omega$ が *SFIP* (**s**trongly **f**inite **i**ntersection **p**roperty) を持つとは, $\mathcal{F}$ の任意有限部分集合族は無限共通部分集合ともつことである. また, $\mathcal{F}$ の 偽共通部分 (*pseudointersection*) とは集合 $A \in [\omega]^\omega$ ですべての $B \in \mathcal{F}$ に対して, $A \setminus B$ は有限集合である.

$$\mathfrak{p} = \min\{\kappa ; \exists \mathcal{F} \subset [\omega]^\omega \mid |\mathcal{F}| = \kappa \wedge \mathcal{F} \text{ は SFIP をもつ} \wedge \text{偽共通部分を持たない.}\}$$

定理 16 (Bell [Bel81])

- $\aleph_1 \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{c}$,
- $\mathfrak{p} = \min\{\kappa ; \neg \text{MA}(\kappa, \sigma\text{-centred})\}.$

① 導入

② $\aleph_1$ 上の組み合わせ論

③ 実数上の組み合わせ論

④ $\aleph_1$ 上と実数上の組み合わせ論の関係性

定理 17 ([Moo00, Tod91])

 $\mathcal{K}'_3$ implies $\text{add}(\mathcal{N}) > \aleph_1$.

定理 18 ([Tod86, Yor08])

 $\mathcal{K}'_2$ implies $\mathfrak{b} > \aleph_1$.

定義 19

$\omega \rightarrow \omega$ の函数全体の集まりを ${}^\omega\omega$ とする. *unbounded number* は次で与えられる基数不変量である:

$$\mathfrak{b} = \min\{\kappa ; \exists \mathcal{F} \in [{}^\omega\omega]^\kappa \forall x \in {}^\omega\omega \exists y \in \mathcal{F} \neg y \leq^* x\}$$

ここで, $y \leq^* x$ は $\exists N \in \omega \forall n \in \omega \setminus N \ y(n) \leq x(n)$, であり 有限個を除いたすべての点で $y(n) \leq x(n)$ ということである.

Proof.

$\mathcal{K}'_2$ と $\mathfrak{b} = \aleph_1$ を仮定し矛盾を導くことで証明をする. $\mathcal{F} = \{f_\xi; \xi \in \omega_1\} \subset {}^\omega\omega$ を次を満たす函数族とする:

- ① 各 f_ξ は単調増加函数,
- ② $\xi \leq \eta$ ならば $f_\xi \leq^* f_\eta$,
- ③ 任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対して ある $f \in \mathcal{F}$ が存在し, $\neg f \leq^* x$ である.

$K_0 \subset [\omega_1]^2$ を次で定義する:

$\{f, g\} \in K_0$ iff $f(n) < g(n)$ と $g(n) < f(n)$ を満たすような n がそれぞれ存在する.

③ より, K_0 は ccc-分割であることが示される (割愛). H を ω_1 -サイズ K_0 -homogeneous とする.

もし, ある $f, g \in H$ が存在し, $f \leq g$ を満たすとすれば, $\{f, g\} \in K_0$ に反するので矛盾を孕む.



Proof.

$\mathcal{K}'_2$ と $\mathfrak{b} = \aleph_1$ を仮定し矛盾を導くことで証明をする. $\mathcal{F} = \{f_\xi; \xi \in \omega_1\} \subset {}^\omega\omega$ を次を満たす函数族とする:

- ① 各 f_ξ は単調増加函数,
- ② $\xi \leq \eta$ ならば $f_\xi \leq^* f_\eta$,
- ③ 任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対して ある $f \in \mathcal{F}$ が存在し, $\neg f \leq^* x$ である.

$K_0 \subset [\omega_1]^2$ を次で定義する:

$\{f, g\} \in K_0$ iff $f(n) < g(n)$ と $g(n) < f(n)$ を満たすような n がそれぞれ存在する.

③ より, K_0 は ccc-分割であることが示される (割愛). H を ω_1 -サイズ K_0 -homogeneous とする.

もし, ある $f, g \in H$ が存在し, $f \leq g$ を満たすとすれば, $\{f, g\} \in K_0$ に反するので矛盾を孕む.



Proof.

$\mathcal{K}'_2$ と $\mathfrak{b} = \aleph_1$ を仮定し矛盾を導くことで証明をする. $\mathcal{F} = \{f_\xi; \xi \in \omega_1\} \subset {}^\omega\omega$ を次を満たす函数族とする:

- ① 各 f_ξ は単調増加函数,
- ② $\xi \leq \eta$ ならば $f_\xi \leq^* f_\eta$,
- ③ 任意の $x \in {}^\omega\omega$ に対して ある $f \in \mathcal{F}$ が存在し, $\neg f \leq^* x$ である.

$K_0 \subset [\omega_1]^2$ を次で定義する:

$\{f, g\} \in K_0$ iff $f(n) < g(n)$ と $g(n) < f(n)$ を満たすような n がそれぞれ存在する.

③ より, K_0 は ccc-分割であることが示される (割愛). H を ω_1 -サイズ K_0 -homogeneous とする.

もし, ある $f, g \in H$ が存在し, $f \leq g$ を満たすとすれば, $\{f, g\} \in K_0$ に反するので矛盾を孕む.



Proof.

ある $f, g \in H$ が存在し, $f \leq g$ であることを示す.

$H = \{f_\xi; \xi \in \omega_1\}$ を $\leq^*$ - 上昇列となるように列挙する.

ある $\gamma \in \omega_1$, $\mathcal{A} \in [\omega_1 \setminus \gamma]^{\omega_1}$, $n_0 \in \omega$ と $\sigma \in {}^{n_0}\omega$ が存在し次を満たす:

- ④ 任意の $\xi \in \omega_1$ と $n \in \omega$ に対して, ある $\eta \in \gamma$ が存在し, $f_\xi|_n \subset f_\eta$,
- ⑤ 任意の $\xi \in \mathcal{A}$ と $n \in \omega \setminus n_0$ に対して, $\sigma = f_\xi|_{n_0} f_\gamma(n) \leq f_\xi(n)$ である.



Proof.

ある $f, g \in H$ が存在し, $f \leq g$ であることを示す.

$H = \{f_\xi; \xi \in \omega_1\}$ を $\leq^*$ - 上昇列となるように列挙する.

ある $\gamma \in \omega_1$, $\mathcal{A} \in [\omega_1 \setminus \gamma]^{\omega_1}$, $n_0 \in \omega$ と $\sigma \in {}^{n_0}\omega$ が存在し次を満たす:

- ④ 任意の $\xi \in \omega_1$ と $n \in \omega$ に対して, ある $\eta \in \gamma$ が存在し, $f_\xi|_n \subset f_\eta$,
- ⑤ 任意の $\xi \in \mathcal{A}$ と $n \in \omega \setminus n_0$ に対して, $\sigma = f_\xi|_{n_0} f_\gamma(n) \leq f_\xi(n)$ である.

実際, $\Omega = \{f_\xi|_n; \xi \in \omega_1 \wedge n \in \omega\}$ は可算集合であるので, ④ を満たすような γ が存在する.

また, 各 $\xi > \gamma$ に対して ある n_ξ が存在し, $f_\gamma(m) \leq f_\xi(m)$ for all $m \in \omega \setminus n_\xi$ を満たすので,

⑤ を満たすような $\mathcal{A}$, n_0 , σ が選択できる. □

Proof.

ある $f, g \in H$ が存在し, $f \leq g$ であることを示す.

$H = \{f_\xi; \xi \in \omega_1\}$ を $\leq^*$ - 上昇列となるように列挙する.

ある $\gamma \in \omega_1$, $\mathcal{A} \in [\omega_1 \setminus \gamma]^{\omega_1}$, $n_0 \in \omega$ と $\sigma \in {}^{n_0}\omega$ が存在し次を満たす:

- ④ 任意の $\xi \in \omega_1$ と $n \in \omega$ に対して, ある $\eta \in \gamma$ が存在し, $f_\xi|_n \subset f_\eta$,
- ⑤ 任意の $\xi \in \mathcal{A}$ と $n \in \omega \setminus n_0$ に対して, $\sigma = f_\xi|_{n_0} f_\gamma(n) \leq f_\xi(n)$ である.

n_1 を $\{f_\xi(n); \xi \in \mathcal{A}\} \subset \omega$ は無限集合となる最小の n とする. このとき, ある増加列 $\langle \beta_i; i \in \omega \rangle$ が存在して, $\{f_{\beta_i}(n_1); i \in \omega\}$ は無限集合である.

$\sigma \subset f_\alpha$ を満たす $\alpha \in \gamma$ を固定する. $n_2 > n_1$ を $f_\alpha(n) \leq f_\gamma(n)$ for $n \in \omega \setminus n_2$ を満たすようにとり, $i \in \omega$ を $f_{\beta_i}(n_1) \geq f_\alpha(n_2)$ を満たすようにとる. このとき, 次を満たす.

- $n \in n_1$ のときは $f_\alpha(n) = \sigma(n) = f_{\beta_i}(n)$,
- $n \in [n_1, n_2)$ のときは $f_\alpha(n) \leq f_\alpha(n_2) \leq f_{\beta_i}(n_1) \leq f_{\beta_i}(n)$,
- $n \in \omega \setminus n_2$ のときは $f_\alpha(n) \leq f_\gamma(n) \leq f_{\beta_i}(n)$.

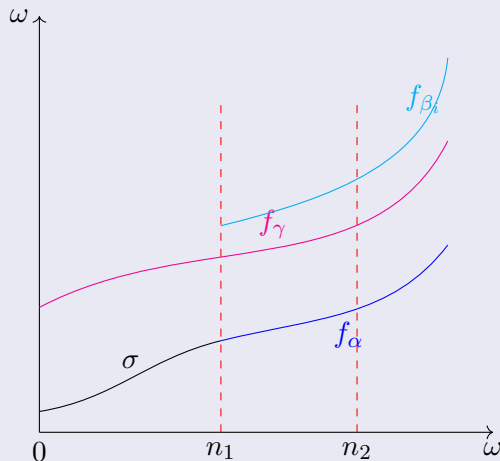


Proof.

次が成立している:

- 各 f_ξ は $\leq$ -上昇関数である,
- $n_0 \leq n_1 \leq n_2$ である,
- $\sigma \subset f_\alpha, f_{\beta_i}$ である,
- $f_\alpha(n_2) \leq f_{\beta_i}(n_1)$ である,
- $f_\gamma(n) \leq f_{\beta_i}(n)$ がすべての $n \geq n_1$ でなりたつ.
- $f_\alpha(n) \leq f_\gamma(n)$ がすべての $n \geq n_2$ でなりたつ,

よって, $f_\alpha(n) \leq f_{\beta_i}(n)$ がすべての $n \in \omega$ に対して成り立つ.



問題 20

- $\mathcal{K}'_3$ は $g > \aleph_1$ を導くのか? またはより強く $p > \aleph_1$ を導くのか?
- $U(\text{club})$ は $\mathfrak{b} > \aleph_1$ を導くのか? またはより弱く $\mathfrak{d} > \aleph_1$ なら導けるのか,
- $\mathcal{K}'_2$ は $\mathfrak{v}_{unb} > \aleph_1$ を導くのか?

- [Bel81] Murray G. Bell.
On the combinatorial principle $P(\mathfrak{c})$.
Fund. Math., 114(2):149–157, 1981.
- [Bla10] Andreas Blass.
Combinatorial cardinal characteristics of the continuum.
In *Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3*, pages 395–489. Springer, Dordrecht, 2010.
- [CM22] Miguel A. Cardona and Diego A. Mejía.
Forcing constellations of Cichoń's diagram by using the Tukey order.
Kyōto Daigaku Sūrikaiseki Kenkyūsho Kōkyūroku, 2213:14–47, 2022.
arXiv:2203.00615.
- [DS78] Keith J. Devlin and Saharon Shelah.
A weak version of $\diamond$ which follows from $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.
Israel J. Math., 29(2-3):239–247, 1978.
- [GKMS21] Martin Goldstern, Jakob Kellner, Diego A. Mejía, and Saharon Shelah.
Controlling cardinal characteristics without adding reals.
Journal of Mathematical Logic, 21(03):2150018, 2021.
- [Jec03] Thomas Jech.
Set theory.
Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, millennium edition, 2003.

- [Moo00] J. Tatch Moore.
Continuous colorings associated with certain characteristics of the continuum.
Discrete Math., 214(1-3):263–273, 2000.
- [MS70] D. A. Martin and R. M. Solovay.
Internal Cohen extensions.
Ann. Math. Logic, 2(2):143–178, 1970.
- [Sol70] Robert M. Solovay.
A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.
Ann. of Math. (2), 92:1–56, 1970.
- [Tod86] Stevo Todorčević.
Remarks on cellularity in products.
Compositio Math., 57(3):357–372, 1986.
- [Tod89] Stevo Todorčević.
Partition problems in topology, volume 84 of *Contemporary Mathematics*.
American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.
- [Tod91] Stevo Todorčević.
Remarks on Martin’s axiom and the continuum hypothesis.
Canad. J. Math., 43(4):832–851, 1991.

- [Yor08] Teruyuki Yorioka.
Some weak fragments of Martin's axiom related to the rectangle refining property.
Arch. Math. Logic, 47(1):79–90, 2008.
- [Yor19] Teruyuki Yorioka.
Todorčević fragments of martin's axiom and variations of uniformization of ladder system colorings.
Kyōto Daigaku Sūrikaiseki Kenkyūsho Kōkyūroku, 2141:49–55, 2019.